**Часть 3. Решение СЛАУ итерационными методами**

**Формулировка задачи и ее формализация**

Найти корни СЛАУ вида Ax=b методом Зейделя. Исследовать точность решения, когда определитель матрицы близок к 0.

**Алгоритм метода и условие его применимости**

Итерационный метод:

Суть такого метода заключается в нахождении по приближённому значению величины следующего приближения (являющегося более точным). Итерационные методы позволяют получить решение с наперед заданной точностью, если доказана сходимость метода. Строго точного решения итерационные методы не дают, поскольку оно достигается как предел последовательности векторов. Характер сходимости и сам факт сходимости метода зависит от выбора начального приближения корня.

Условия сходимости:

Для того, чтобы метод сходился, нужно, чтобы система была представима в виде x = αx + β.

Достаточное условие сходимости: <1 ; достаточное и необходимое условие сходимости: | (α)| < 1.

Метод Зейделя всегда сходится для систем, в которых матрица А симметричная и положительно определенная. Если матрица не является симметричной, всегда можно свести систему к подходящей, домножив обе части равенства слева на , получив систему \*А\*х = \*b, которая является нормальной. При таком преобразовании квадратично возрастает число обусловленностей и уменьшается точность решения.

Описание метода:

Метод является модификацией метода простых итераций. При нахождении i-й компоненты (k+1)-го приближения сразу используются уже найденные компоненты (к +1) -го приближения с меньшими номерами 1,2,…,i−1.  
Записывая суть метода в матричной форме:

= L\* + U\* + β, L – нижняя треугольная матрица, U – верхняя треугольная матрица, являющиеся LU-разложением исходной матрицы А.

Считается, что решение получено с заданной точностью ɛ, если: || - || < \*ε.

Алгоритм метода Зейделя:

1. Преобразовать \*А\*х = \*b, если система изначально не является нормальной.
2. Преобразовать систему к виду x = αx + β: = , = .
3. Задать начальное приближение решение , малое положительное число , положить k=0.
4. Вычислить вектор по формуле:
5. Если выполнено условие завершения|| - || < ε, процесс прекратить, иначе положить k=k+1 и перейти к пункту (4).

Условия применимости:

, проверяем с помощью пакета Matlab.

**Предварительный анализ задачи и условий применимости метода**

Для исследования работы метода выберем матрицы с большими и маленькими числами обусловленности, а также с разными определителями со значениями: (проверим с помощью пакета Matlab).

**Тестовый пример с детальными расчетами для задачи малой размерности**

А = ; b =

1. Выразим столбец х:
2. α = , = β = ;

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| k |  |  |  | |||| |
| 0 | 1.2 | 1.3 | 1.4 | - |
| 1 | 0.93 | 0.974 | 1.0192 | 0.3808 |
| 2 | 1.00068 | 0.997944 | 1.0002752 | 0.07068 |
| 3 | 1.00017808 | 0.999936864 | 0.9999770112 | 0.0019928 |
| 4 | 1.0000086125 | 1.0000005764 | 0.9999981622 | 0.0001694675 |

С точностью корни уравнения: х = .

**Модульная структура программы**

Программа состоит из … модулей:

**Численный анализ решения задачи**

Для исследования были выбраны матрицы размерности , точность .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Определитель | Число обсуловленностей | Кол-во итераций | Вектор невязки |
| 4.000000e-020 | 40,033223 | 27 | 1.711403e-009 |
| 3.628800e-010 | 14,506673 | 26 | 1.047415e-008 |
| 0,000040 | 16,244374 | 24 | -2.486385e-007 |
| 0,004890 | 54,628695 | 15 | -1.109537e-007 |
| 37,209563 | 2,411739 | 7 | -1.060069e-009 |
| 6,000000e-020 | 1,077590+003 | 10662 | -2.140647e-005 |
| 3,628800e-010 | 4,896994e+003 | 7377 | 1.119103e-006 |
| 3,700000e-005 | 2,637221e+003 | 4214 | 1.825174e-004 |
| 1,397000e-003 | 4,444521e+003 | 3721 | -1.163510e-004 |
| 1822,255852 | 4,884314e+003 | 2672 | -2.083834e-006 |

**Краткие выводы**

Метод Зейделя является модификацией метода простых итераций, которая существенно увеличивает сходимость. Условия применимости метода позволяют работать с симметричными матрицами, для обычных матриц приведение СЛАУ к подходящему виду увеличивает число обусловленности.   
Метод хорошо сходится для матриц, у которых маленькое число обусловленности. Для матриц, определитель которых близок к нулю, количество итераций для поиска вектора решений незначительно увеличивается по сравнению с матрицами с обычным определителем. При увеличении числа обусловленностей количество итераций сильно возрастает, метод сходится на бесконечности, что делает его применение неоправданным.